Álgebra Linear e Geometria Analítica

Matrizes

Grupo de Disciplina

Aula 02

Maputo, Março de 2023

Conteúdos da Aula

- **Matrizes: definição e tipos**
- **Operações com matrizes**
- **Determinantes**

Definição de Matrizes

Uma matriz A é uma tabela rectangular de escalares de $m \times n$ números reais distribuídos por ***m*** linhas horizontais e ***n*** colunas verticais:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×3, as suas linhas são $(1, -4, 5)$ e $(0, 3, -2)$ e as suas colunas são $\binom{1}{2}$, $\binom{-4}{3}$ e $\binom{5}{-2}$.

Tipos de Matrizes

Matriz rectangular: uma matriz na qual $m \neq n$ é denominada matriz rectangular.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Matriz Coluna: a matriz de ordem n por 1é ma *matriz-coluna*.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_{\mathrm{n}\times 1}$$

Matriz linha: a matriz de ordem 1 por n é uma matriz linha.

$$[a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n]\_1 \times n$$

Tipos de Matrizes

Matriz Diagonal

Uma matriz $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{ij}}]$ de ordem n com os elementos $\boldsymbol{a_{ij}}$, tais que, $\boldsymbol{i = j}$ constituem uma matriz diagonal, cujos elementos são: $\boldsymbol{a_{11}} \quad \boldsymbol{a_{22}} \quad \boldsymbol{a_{33}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a_{nn}}$ e com os restantes elementos $\boldsymbol{a_{ij}}$, tal que $\boldsymbol{i \neq j}$.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tipos de Matrizes

Matriz Escalar: uma matriz escalar é a matriz diagonal, tal que os elementos a_{ii} são todos iguais.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Exemplo: **A=** $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Matriz identidade: uma matriz identidade é uma matriz escalar cujos elementos $\boldsymbol{a_{ii}}$ são iguais a $\mathbf{1}$

$$A= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tipos de Matrizes

Matriz simétrica: uma matriz quadrada de ordem n é dito ser simétrica se $\boldsymbol{a_{ij} = a_{ji}}$.

$$\text{Exemplo: } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz anti-simétrica: uma matriz quadrada de ordem n é dito ser simétrica se $\boldsymbol{a_{ij} = -a_{ji}}$.

$$\text{Exemplo: } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Tipos de Matrizes

Matriz zero ou **matriz nula**: é uma matriz $m \times n$ cujas entradas são tidas nulas.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tipos de Matrizes

Matrizes especiais

Matriz triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Matriz triangular inferior

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 9 & -3 \end{bmatrix}$

Igualdade de Matrizes

Duas matrizes dizem-se **iguais** se os seus elementos correspondentes forem iguais.
Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$
então $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$

Exemplo: dadas as matrizes A e B, encontre os valores de x, y, z e t de modo que A e B sejam iguais.

$$A = \begin{bmatrix} x+y & 2z+t \\ x-y & z-t \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Resolução
A e B são iguais se e só se os elementos correspondentes forem iguais

Igualdade de Matrizes

Então temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \\ 2z+t=7 \\ z-t=5 \end{cases}$$

Para x e y

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \ x=y+1 \Leftrightarrow y+1+y=3 \Leftrightarrow 2\text{y}=2$$

$$\Leftrightarrow \ \text{y}=1 \Rightarrow x=2$$

Para z e t

$$\begin{cases} 2z+t=7 \\ z-t=5 \end{cases} \Leftrightarrow z=t+5 \Leftrightarrow 2(t+5)+t=7 \Leftrightarrow 3\text{t}=-3 \Rightarrow t=-1$$

$$\Rightarrow z=-4$$

Solução: $\text{y}=1$, $x=2$, $t=-1$ e $z=-4$

Operações com Matrizes

Adição de Matrizes:
A soma de duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ é obtida pela soma de elementos correspondentes:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

Exemplo: dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Resolução

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + (-4) & 2 + 3 & 0 + 2 \\ 1 + (-3) & -1 + 1 & 2 + 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Operações com Matrizes

Subtracção de matrizes

A subtracção de duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ é a matriz $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$

Exemplo: das as matrizes $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -5 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

então

$$A - B = \begin{bmatrix} -5 - 12 & 1 - 4 \\ 3 - (-5) & -2 - 2 \\ 2 - 6 & -4 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & -3 \\ 8 & -4 \\ -4 & -12 \end{bmatrix}$$

Operações com Matrizes

Multiplicação de uma matriz por um escalar

A multiplicação de uma matriz $A = [a_{ij}]$ por um escalar $k \in IR(\text{ou } IC)$, denotado por $k.A$ é obtida pela multiplicação de cada elemente de A por k.

Exemplo: sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ e k =3

Então

$$3A = 3\begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot(-4) & 3\cdot 5 \\ 3\cdot 6 & 3\cdot 1 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 2 & 3\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 15 \\ 18 & 3 & 9 \\ 9 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

Operações com Matrizes

Propriedades da multiplicação da matriz por escalar:

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$
$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$
$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$
$$1 \cdot A = A$$

Notação de Somatório

O símbolo $\sum$ chama-se somatório

Exemplo:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3$$
$$\sum_{i=0}^{5} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^3 + 2^4 + 2^5$$

Operações com Matrizes

Produto de matrizes

Sejam dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ e $B = [b]_{p\times n}$ o produto $A \cdot B$ é a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ cujos elementos são calculados da seguinte forma:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Exemplo: dadas as matrizes

$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$, encontre $A \cdot B$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + (-3)\cdot 2 + 5\cdot(-5) & 2\cdot 4 + (-3)\cdot 0 + 5\cdot 1 \\ -3\cdot 3 + 6\cdot 2 + 7\cdot(-5) & -3\cdot 4 + 6\cdot 0 + 7\cdot 1 \\ 5\cdot 3 + 7\cdot 2 + (-8)\cdot(-5) & 5\cdot 4 + 7\cdot 0 + (-8)\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 + 10 - 25 & 8 + 0 + 5 \\ -9 + 12 - 35 & -12 + 0 + 7 \\ 15 + 14 + 40 & 20 + 0 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 13 \\ -32 & -5 \\ 69 & 12 \end{bmatrix}$$

Transposição de Matrizes

A trasnsposta de uma matriz $\boldsymbol{A = [a_{ij}]}$ é a matriz denotada por A^t. Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$, a sua tramsposta, é uma matriz que resulta da troca de linhas por coluna: $A^t = [a_{ji}]$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

A sua transposta é $A^t = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinante de Matriz

Definição: seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n, chamamos determinante de A e representa-se por $\det A$ ou $|A|$ ao elemento de IR ou C definido por recorrência seguinte forma:

Matriz de ordem 1, $n = 1$
$A = [a_{ij}]$, então $\det A = a_{ij}$
Exemplo: $A = [5] \Longrightarrow \det A = 5$

Matriz de ordem 2, $n = 2$
Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ então $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 18 = -4$

Determinante de Matriz

Matriz de ordem; n =3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{22})$$

Determinante de Matriz

Regras de Sarrus

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\, a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{32}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Note que: este método apenas é usado para as matrizes de ordem 3.

Exemplo: Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Determinante de uma Matriz de ordem superior

Regra de La Place

Complemento algébrico

Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ chama-se complemento algébrico da posição da posição (i,j) da matriz A, o elemento de IR ou C que representamos por

$$\hat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j)$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_{13} = (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 35 = 1$$

$$\hat{A}_{12} = (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -(24 - 42) = -(-18) = 18$$

Determinante de uma Matriz de ordem superior

Teorema:
Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$; $n \geq 2$. o determinante de A é igual a soma dos produtos que se obtém multiplicando os elementos de uma linha ou coluna pelos complementos algébricos das respectivas posições.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+0} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 21 = -21$$