Análise Numérica

Timóteo Sambo (2020), adaptado por Nelson Mulemba

Resolução de Sistemas de Equações Lineares
Método de Gauss-Seidel

Maputo, September 9, 2024

Índice

Introdução

- Desta vez, estudaremos o método de Gauss-Seidel. Este método é uma modificação do método de Gauss-Jacobi, criado com objectivo de acelerar a convergência.
- Considere o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Método de Gauss-Seidel

- O método de Gauss-Seidel é uma modificação do método de Gauss-Jacobi, mais especificamente, no método de Gauss-Jacobi escreviamos

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k-1)}\right) \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k-1)}\right) \\ \quad\vdots \\ x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - a_{n2}x_2^{(k-1)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k-1)}\right) \end{cases}$$

Método de Gauss-Seidel

- No método de Gauss-Seidel faremos

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k-1)}\right) \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k-1)}\right) \\ x_3^{(k)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - a_{34}x_4^{(k-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k-1)}\right) \\ \quad\vdots \\ x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}\right) \end{cases}$$

Convergência do Método de Gauss-Seidel

Teorema

Se o sistema linear satisfaz o critério das linhas então o método de Gauss-Seidel converge.

Teorema (Critério de Sassenfield)

O método de Gauss-Seidel converge se $\max_{1\leq i\leq n} \beta_i < 1$, em que os β_i são calculados pela fórmula

$$\beta_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Método de Gauss-Seidel

Use o método de Gauss-Seidel para resolver o sistema

$$\begin{cases} 4x + y + 2z = 20 \\ -x + 3y + z = 30 \\ 2x + 2y + 5z = 65 \end{cases}$$

, com precisão de $0,05$ no erro relativo.

Verificação da convergência

A matriz A é estritamente diagonalmente dominante, logo o método de Gauss-Seidel converge. A fórmula iteradora é:

$$\begin{cases} x^{(k)} = \frac{1}{4}(20 - y^{(k-1)} - 2z^{(k-1)}) \\ \\ y^{(k)} = \frac{1}{3}(30 + x^{(k)} - z^{(k-1)}) \\ \\ z^{(k)} = \frac{1}{5}(65 - 2x^{(k)} - 2y^{(k)}) \end{cases}$$

Método de Gauss-Jacobi

Exemplo

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	5	11,6667	6,3333	11,6667	1
2	-1,0833	7,5278	10,4222	6,0833	0,5836
3	-2,0931	5,8282	11,5059	1,6995	0,1477
4	-2,2100	5,4280	11,7128	0,4002	0,03417

O erro relativo tornou-se menor que $0,05$ após 4 iterações, logo $x = -2,2100$, $y = 5,4280$, $z = 11,7128$ é a solução aproximada.

Método de Gauss-Jacobi

Exemplo

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	5	11,6667	6,3333	11,6667	1
2	-1,0833	7,5278	10,4222	6,0833	0,5836
3	-2,0931	5,8282	11,5059	1,6995	0,1477
4	-2,2100	5,4280	11,7128	0,4002	0,03417

O erro relativo tornou-se menor que $0,05$ após 4 iterações, logo $x = -2,2100$, $y = 5,4280$, $z = 11,7128$ é a solução aproximada.

Método de Gauss-Jacobi

Exemplo

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	5	11,6667	6,3333	11,6667	1
2	-1,0833	7,5278	10,4222	6,0833	0,5836
3	-2,0931	5,8282	11,5059	1,6995	0,1477
4	-2,2100	5,4280	11,7128	0,4002	0,03417

O erro relativo tornou-se menor que $0,05$ após 4 iterações, logo $x = -2,2100$, $y = 5,4280$, $z = 11,7128$ é a solução aproximada.

Método de Gauss-Jacobi

Exemplo

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	5	11,6667	6,3333	11,6667	1
2	-1,0833	7,5278	10,4222	6,0833	0,5836
3	-2,0931	5,8282	11,5059	1,6995	0,1477
4	-2,2100	5,4280	11,7128	0,4002	0,03417

O erro relativo tornou-se menor que $0,05$ após 4 iterações, logo $x = -2,2100$, $y = 5,4280$, $z = 11,7128$ é a solução aproximada.

Método de Gauss-Jacobi

Exemplo

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	5	11,6667	6,3333	11,6667	1
2	-1,0833	7,5278	10,4222	6,0833	0,5836
3	-2,0931	5,8282	11,5059	1,6995	0,1477
4	-2,2100	5,4280	11,7128	0,4002	0,03417

O erro relativo tornou-se menor que $0,05$ após 4 iterações, logo $x = -2,2100$, $y = 5,4280$, $z = 11,7128$ é a solução aproximada.

Método de Gauss-Jacobi

Exemplo

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	5	11,6667	6,3333	11,6667	1
2	-1,0833	7,5278	10,4222	6,0833	0,5836
3	-2,0931	5,8282	11,5059	1,6995	0,1477
4	-2,2100	5,4280	11,7128	0,4002	0,03417

O erro relativo tornou-se menor que $0,05$ após 4 iterações, logo $x = -2,2100$, $y = 5,4280$, $z = 11,7128$ é a solução aproximada.

Método de Gauss-Seidel

Use o método de Gauss-Seidel para resolver o sistema

$$\begin{cases} 5x + y + z = 5 \\ 3x + 4y + z = 6 \\ 3x + 3y + 6z = 0 \end{cases}$$

, com precisão de $0,01$ no erro relativo.

Verificação da convergência

- A matriz A não é estritamente diagonal dominante;
- Critério de Sassenfield:
  - $\beta_1 = \frac{1}{|a_{11}|}(|a_{12}| + |a_{13}|) = \frac{2}{5} < 1;$
  - $\beta_2 = \frac{1}{|a_{22}|}(|a_{21}|\beta_1 + |a_{23}|) = \frac{3 \cdot 0,4+1}{4} = 0,55 < 1;$
  - $\beta_3 = \frac{1}{|a_{33}|}(|a_{31}|\beta_1 + |a_{32}|\beta_2) = \frac{3 \cdot 0,4+3 \cdot 0,55}{6} = 0,475 < 1;$

  Portanto, segundo este critério o método de Gauss-Seidel converge.

Método de Gauss-Seidel

Exemplo

$$\begin{cases} x^{(k)} = \frac{1}{5}(5 - y^{(k-1)} - z^{(k-1)}) \\ y^{(k)} = \frac{1}{4}(6 - 3x^{(k)} - z^{(k-1)}) \\ z^{(k)} = \frac{1}{6}(-3x^{(k)} - 3y^{(k)}) \end{cases}$$

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	1	0,75	-0,875	1	1
2	1,025	0,95	-0,9875	0,2	0,1951
3	1,0075	0,9913	-0,9994	0,0413	0,0409
4	1,0016	0,9986	-1,0001	0,0074	0.0074

Método de Gauss-Seidel

Exemplo

$$\begin{cases} x^{(k)} = \frac{1}{5}(5 - y^{(k-1)} - z^{(k-1)}) \\ y^{(k)} = \frac{1}{4}(6 - 3x^{(k)} - z^{(k-1)}) \\ z^{(k)} = \frac{1}{6}(-3x^{(k)} - 3y^{(k)}) \end{cases}$$

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	1	0,75	-0,875	1	1
2	1,025	0,95	-0,9875	0,2	0,1951
3	1,0075	0,9913	-0,9994	0,0413	0,0409
4	1,0016	0,9986	-1,0001	0,0074	0.0074

Método de Gauss-Seidel

Exemplo

$$\begin{cases} x^{(k)} = \frac{1}{5}(5 - y^{(k-1)} - z^{(k-1)}) \\ y^{(k)} = \frac{1}{4}(6 - 3x^{(k)} - z^{(k-1)}) \\ z^{(k)} = \frac{1}{6}(-3x^{(k)} - 3y^{(k)}) \end{cases}$$

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	1	0,75	-0,875	1	1
2	1,025	0,95	-0,9875	0,2	0,1951
3	1,0075	0,9913	-0,9994	0,0413	0,0409
4	1,0016	0,9986	-1,0001	0,0074	0.0074

Método de Gauss-Seidel

Exemplo

$$\begin{cases} x^{(k)} = \frac{1}{5}(5 - y^{(k-1)} - z^{(k-1)}) \\ y^{(k)} = \frac{1}{4}(6 - 3x^{(k)} - z^{(k-1)}) \\ z^{(k)} = \frac{1}{6}(-3x^{(k)} - 3y^{(k)}) \end{cases}$$

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	1	0,75	-0,875	1	1
2	1,025	0,95	-0,9875	0,2	0,1951
3	1,0075	0,9913	-0,9994	0,0413	0,0409
4	1,0016	0,9986	-1,0001	0,0074	0.0074

Método de Gauss-Seidel

Exemplo

$$\begin{cases} x^{(k)} = \frac{1}{5}(5 - y^{(k-1)} - z^{(k-1)}) \\ y^{(k)} = \frac{1}{4}(6 - 3x^{(k)} - z^{(k-1)}) \\ z^{(k)} = \frac{1}{6}(-3x^{(k)} - 3y^{(k)}) \end{cases}$$

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	1	0,75	-0,875	1	1
2	1,025	0,95	-0,9875	0,2	0,1951
3	1,0075	0,9913	-0,9994	0,0413	0,0409
4	1,0016	0,9986	-1,0001	0,0074	0.0074

O erro relativo tornou-se menor que $0,01$ após 4 iterações, logo $x = 1,0016$, $y = 0,9986$, $z = -1,0001$ é a solução aproximada.

Exercício

Resolva o sistema

$$\begin{cases} 20x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 33 \\ x_1 & + & 10x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 38.4 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 10x_3 & + & x_4 & = & 43.5 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 20x_4 & = & 45.6 \end{cases}$$

usando o método de Gauss-Seidel, a partir do vector nulo e com precisão de $\epsilon = 10^{-4}$ no erro relativo.


GARANTE O TEU FUTURO
COM UMA FORMAÇÃO SÓLIDA
ISUTC
Prolong. da Av. Kim Il Sung (IFT/TDM) Edifício D1
Maputo, Moçambique
www.facebook.com/isutc
www.transcom.co.mz/isutc