

TEMA 4: PROBLEMAS DE TRANSPORTE E AFECTAÇÃO

Degenerescência

Uma solução é degenerada quando tem menos do que $(m + n - 1)$ VB e ocorre sempre que surjam empates na obtenção de uma

- SBA inicial, antes de ser escolhida a última VB,
- nova SBA, aquando da escolha da variável a ser substituída na base.

Um dos métodos para resolver estes casos, consiste em “perturbar” os valores de a_i e b_j , da forma seguinte :

$$\begin{aligned} \bar{a}_i &= a_i + \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, m) && \text{com } \varepsilon > 0 \text{ e arbitrariamente pequeno, para} \\ \bar{b}_j &= b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) && \text{que a solução obtida seja muito próxima} \\ \bar{b}_n &= b_n + m \times \varepsilon && \text{da correcta.} \end{aligned}$$

Considere-se o seguinte problema de transportes, traduzido no seguinte quadro:

	7		4		3	100
	3		1		2	40
80		20		40		

A SBA inicial determinada pelo método do Canto Noroeste é a seguinte :

80	7	20	4		3	100
	3		1	40	2	40
80		20		40		

A solução obtida é degenerada, pois $(m + n - 1) = 4$ e apenas 3 VB são positivas.

Aplicando o método descrito em cima, tem-se :

	7	4	3	$100 + \varepsilon$
	3	1	2	$40 + \varepsilon$
80		20	$40 + 2\varepsilon$	

e preenchendo este quadro pelo Canto Noroeste,

80	7	20	4ε	3	$100 + \varepsilon$
	3		$1 40 + \varepsilon$	2	$40 + \varepsilon$
80		20	$40 + 2\varepsilon$		

Como ε é arbitrariamente pequeno, faz-se $\varepsilon = 0$ e obtém-se a seguinte SB :

80	7	20	$4 \mathbf{0}$	3	100
	3		$1 \mathbf{40}$	2	40
80		20	40		

Problema de Afectação (“Assignment”)

Pretende-se, com a resolução deste problema, afectar (atribuir, distribuir) da forma mais económica indivíduos a tarefas, entendidos estas entidades em sentido geral. Atendendo a algumas das suas propriedades, este problema pode ser formulado como sendo de transportes, estando então garantida a integridade da solução. No entanto, não é a resolução como problema de transporte a mais aconselhável, até porque este problema é normalmente degenerado.

O problema clássico consiste em afectar n indivíduos a n tarefas \square um indivíduo por tarefa e uma tarefa por indivíduo, tendo por objectivo a minimização do custo total envolvido no plano de afectação, sendo conhecidos os custos, c_{ij} , de afectar o indivíduo i à tarefa j ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

Uma das formas de resolver este problema, seria calcular todas as permutações possíveis ($n!$), sendo a solução óptima do plano a permutação que verificasse o menor custo.

Formalização do problema

O problema de afectação pode ser formulado como um caso especial do problema de transporte, e portanto, utilizar um método de resolução mais eficiente.

A formulação é a seguinte :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o indivíduo } i \text{ for afecto à tarefa } j \\ 0 & \text{se o indivíduo } i \text{ não for afecto à tarefa } j \end{cases}$$

Então, o problema consiste em

$$\text{Minimizar } Z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{Sujeito a } \sum_j x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$x_{ij} = 0, 1$$

Resolução do problema

Embora o problema de afectação possa ser resolvido por um algoritmo de PL, pode-se tirar partido da estrutura particular do problema de afectação para desenvolver um algoritmo específico, que se designa por Método Húngaro. Este método tem como base o teorema:

TEOREMA : A solução óptima do problema de afectação não se altera se uma constante for adicionada ou subtraída a qualquer linha ou coluna da matriz de custos.

Passos para resolução de um problema de afectação:



INSTITUTO SUPERIOR DE TRANSPORTES E COMUNICAÇÕES

1º Passo: Subtrair o menor element de cada coluna a todos os elementos dessa coluna. A partir do quadro obtido, subtrair o menor element de cada linha a todos os elementos dessa linha.

2º Passo: Considerar a linha, ou linhas, com menor número de zeros. Enquadrar um zero nessa linha, ou linhas, e cortar todos os outros zeros existentes na mesma linha ou na mesma coluna de um zero enquadrado. Proceder sucessivamente desta forma até já não haver zeros para enquadrar ou cortar.

Se se obtiver um zero enquadrado em cada linha e em cada coluna, o conjunto de zeros enquadrados define uma solução óptima. Caso contrário é necessário prosseguir com o 3º passo.



INSTITUTO SUPERIOR DE TRANSPORTES E COMUNICAÇÕES

3º Passo: Marcar com um sinal todas as linhas que não tenham um zero enquadrado. Marcar todas as colunas que tenham pelo menos um zero riscado sobre linhas já marcadas. Marcar todas as linhas que tenham zeros enquadrados em colunas já marcadas. Prosseguir sucessivamente com a marcação de linhas e colunas até já não ser possível fazer mais marcações. Riscar todas as linhas não marcadas e todas as colunas marcadas.

4º Passo: Considerar o menor elemento da submatriz dos elementos não riscados. Subtrair esse valor a todos os elementos não riscados e somá-lo aos elementos riscados duas vezes, isto é, pertencentes simultaneamente a uma linha e a uma coluna riscadas. Os elementos riscados apenas uma vez (linha ou coluna) não são alterados. Voltar ao 2º passo.

Exemplo 1: Numa fábrica foram instaladas 3 máquinas e 3 empregados. O objectivo da Direcção da fábrica é estabelecer uma afectação máquina–empregado recíproca e exclusiva, que envolva um custo mínimo. Os custos de afectação são os seguintes :

		Máquina		
		1	2	2
Empregado	1	25	31	35
	2	24	17	16
	3	15	23	18

Exemplo 2: Considere o problema em que existem 5 trabalhadores que devem ser afectados a 5 tarefas. A matriz de custos associados à realização de cada tarefa por cada trabalhador é a seguinte:

17.5	15	9	5.5	12
16	16.5	10.5	5	10.5
12	15.5	14.5	11	5.5
4.5	8	14	17.5	13
13	9.5	8.5	12	17.5

Resolva o problema de afectação



SUMÁRIO

Degenerescência em problemas de transporte

Problemas de afectação

TPC: Exercícios 5.11 e 5.12 (Mulenga)