Análise Numérica

Timóteo Sambo (2020), adaptado por Nelson Mulemba

Métodos Iterativos para cálculo de raizes

Maputo, August 26, 2024

Índice

Introdução

Nesta aula vamos apresentar uma classe de métodos de um passo chamados métodos do **ponto fixo**, de **Newton** e da **secante**. Estes métodos são métodos iterativos simples usados para procurar os zeros de funções.

Ponto Fixo

Um ponto $x^* \in \mathbb{R}$ é dito **ponto fixo** da função $f(x)$ se $f(x^*) = x^*$

Método do Ponto Fixo

- α é um ponto fixo de g sse $g(\alpha) = \alpha$;
- Este método consiste em trocar a função $f(x)$ por uma função auxiliar $\varphi(x)$ tal que: $f(r) = 0 \iff \varphi(r) = r$.
- A sequência de aproximações é feita escolhendo uma aproximação x_0 e definindo $x_k = \varphi(x_{k-1})$ para $k \geq 1$.

Teorema

Seja r uma aproximação do zero da função $f(x)$, isolada num intervalo I. Seja $\varphi(x)$ uma função auxiliar para $f(x)$. Se

1. φ e φ' são contínuas em I;
2. $|\varphi'(x)| \leq M < 1$ para todo $x \in I$;
3. $x_0 \in I$;

então a sequência (x_k) definida por $x_k = \varphi(x_{k-1})$ converge para r;

Método do Ponto Fixo ou Iterativo Geral

Algoritmo

1. Escolha a aproximação inicial e as precisões $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$
2. Se $|f(x_0)| < \epsilon$, escolha x_0 como raíz aproximada;
3. Caso contrário, seja $x_1 = \varphi(x_0)$;
4. Se $|x_1 - x_0| < \epsilon$ ou $|f(x_1)| < \epsilon$, escolha x_1 como raiz aproximada
5. Caso contrário, troque x_0 por x_1 e x_1 por $\varphi(x_1)$ e volte ao passo 4.

Método do Ponto Fixo

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, tem um único zero em $(0, 1)$. Calcule-a com precisão 10^{-4}.

- Podemos escrever $x = \frac{x^3+1}{3}$ e usar $\varphi(x) = \frac{x^3+1}{3}$;
- Temos $\varphi'(x) = x^2$, logo φ e φ' são contínuas e $|\varphi'(x)| < 1,\ x \in]0, 1[$;

k	x_k	$x_{k+1} = \varphi(x_k)$	$\lvert x_{k+1} - x_k\rvert$
0	0,5	0,375	0,125
1	0,375	0,350911458	0,024088542
2	0,350911	0,347736945	0,003174514
3	0,347737	0,347349564	0,00038738
4	0,34735	0,347302774	$4,8 \cdot 10^{-5}$

Método do Ponto Fixo

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, tem um único zero em $(0, 1)$. Calcule-a com precisão 10^{-4}.

- Podemos escrever $x = \frac{x^3+1}{3}$ e usar $\varphi(x) = \frac{x^3+1}{3}$;
- Temos $\varphi'(x) = x^2$, logo φ e φ' são contínuas e $|\varphi'(x)| < 1, \ x \in]0, 1[$;

k	x_k	$x_{k+1} = \varphi(x_k)$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	0,5	0,375	0,125
1	0,375	0,350911458	0,024088542
2	0,350911	0,347736945	0,003174514
3	0,347737	0,347349564	0,00038738
4	0,34735	0,347302774	$4,8 \cdot 10^{-5}$

Método do Ponto Fixo

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, tem um único zero em $(0, 1)$. Calcule-a com precisão 10^{-4}.

- Podemos escrever $x = \frac{x^3+1}{3}$ e usar $\varphi(x) = \frac{x^3+1}{3}$;
- Temos $\varphi'(x) = x^2$, logo φ e φ' são contínuas e $|\varphi'(x)| < 1,\ x \in]0, 1[$;

k	x_k	$x_{k+1} = \varphi(x_k)$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	0,5	0,375	0,125
1	0,375	0,350911458	0,024088542
2	0,350911	0,347736945	0,003174514
3	0,347737	0,347349564	0,00038738
4	0,34735	0,347302774	$4,8 \cdot 10^{-5}$

Método do Ponto Fixo

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, tem um único zero em $(0, 1)$. Calcule-a com precisão 10^{-4}.

- Podemos escrever $x = \frac{x^3+1}{3}$ e usar $\varphi(x) = \frac{x^3+1}{3}$;
- Temos $\varphi'(x) = x^2$, logo φ e φ' são contínuas e $|\varphi'(x)| < 1,\ x \in]0, 1[$;

k	x_k	$x_{k+1} = \varphi(x_k)$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	0,5	0,375	0,125
1	0,375	0,350911458	0,024088542
2	0,350911	0,347736945	0,003174514
3	0,347737	0,347349564	0,00038738
4	0,34735	0,347302774	$4,8 \cdot 10^{-5}$

Método do Ponto Fixo

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, tem um único zero em $(0, 1)$. Calcule-a com precisão 10^{-4}.

- Podemos escrever $x = \frac{x^3+1}{3}$ e usar $\varphi(x) = \frac{x^3+1}{3}$;
- Temos $\varphi'(x) = x^2$, logo φ e φ' são contínuas e $|\varphi'(x)| < 1,\ x \in]0, 1[$;

k	x_k	$x_{k+1} = \varphi(x_k)$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	0,5	0,375	0,125
1	0,375	0,350911458	0,024088542
2	0,350911	0,347736945	0,003174514
3	0,347737	0,347349564	0,00038738
4	0,34735	0,347302774	$4,8 \cdot 10^{-5}$

Método do Ponto Fixo

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, tem um único zero em $(0, 1)$. Calcule-a com precisão 10^{-4}.

- Podemos escrever $x = \frac{x^3+1}{3}$ e usar $\varphi(x) = \frac{x^3+1}{3}$;
- Temos $\varphi'(x) = x^2$, logo φ e φ' são contínuas e $|\varphi'(x)| < 1,\ x \in]0, 1[$;

k	x_k	$x_{k+1} = \varphi(x_k)$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	0,5	0,375	0,125
1	0,375	0,350911458	0,024088542
2	0,350911	0,347736945	0,003174514
3	0,347737	0,347349564	0,00038738
4	0,34735	0,347302774	$4,8 \cdot 10^{-5}$

Método do Ponto Fixo

Após a quarta iteração, atingimos a precião desejada, logo $\bar{x} = 0,34735$. Observe que, com o método de bissecção após 8 iterações conseguimos uma precisão de 10^{-2}. Isto mostra que o método do ponto fixo, é mais eficiente que o método de bissecção.

[Melhor extremo]Se $|\varphi'(a)| < |\varphi'(b)|$, então $x_0 = a$, senão $x_0 = b$;

Método de Newton

Método de Newton

Também conhecido por **método das tangentes**, é um caso particular do método do ponto fixo para o qual temos uma forma de determinar a função φ, neste caso,

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Método de Newton

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, tem um único zero em $(0, 1)$. Calcule-a com precisão 10^{-5}.

- $\varphi(x) = x - \frac{x^3-3x+1}{3x^2-3}$ i.e, $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3-3x_k+1}{3x_k^2-3}$;

k	x_k	$x_{k+1} = \varphi(x_k)$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	0,5	0,333333333	0,166666667
1	0,333333	0,347222222	0,013888889
2	0,347222	0,347296353	$7,41 \cdot 10^{-5}$
3	0,347296	0,347296355	$2,1 \cdot 10^{-9}$

Após a 3 iteração, atingimos a precisão desejada, logo $\bar{x} = 0,347296$.

Método de Newton

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, tem um único zero em $(0, 1)$. Calcule-a com precisão 10^{-5}.

- $\varphi(x) = x - \frac{x^3-3x+1}{3x^2-3}$ i.e, $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3-3x_k+1}{3x_k^2-3}$;

k	x_k	$x_{k+1} = \varphi(x_k)$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	0,5	0,333333333	0,166666667
1	0,333333	0,347222222	0,013888889
2	0,347222	0,347296353	$7,41 \cdot 10^{-5}$
3	0,347296	0,347296355	$2,1 \cdot 10^{-9}$

Após a 3 iteração, atingimos a precisão desejada, logo $\bar{x} = 0,347296$.

Método de Newton

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, tem um único zero em $(0, 1)$. Calcule-a com precisão 10^{-5}.

- $\varphi(x) = x - \frac{x^3-3x+1}{3x^2-3}$ i.e, $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3-3x_k+1}{3x_k^2-3}$;

k	x_k	$x_{k+1} = \varphi(x_k)$	$\lvert x_{k+1} - x_k\rvert$
0	0,5	0,333333333	0,166666667
1	0,333333	0,347222222	0,013888889
2	0,347222	0,347296353	$7,41 \cdot 10^{-5}$
3	0,347296	0,347296355	$2,1 \cdot 10^{-9}$

Após a 3 iteração, atingimos a precisão desejada, logo $\bar{x} = 0,347296$.

Método de Newton

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, tem um único zero em $(0,1)$. Calcule-a com precisão 10^{-5}.

- $\varphi(x) = x - \frac{x^3-3x+1}{3x^2-3}$ i.e, $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3-3x_k+1}{3x_k^2-3}$;

k	x_k	$x_{k+1} = \varphi(x_k)$	$\lvert x_{k+1} - x_k\rvert$
0	0,5	0,333333333	0,166666667
1	0,333333	0,347222222	0,013888889
2	0,347222	0,347296353	$7,41 \cdot 10^{-5}$
3	0,347296	0,347296355	$2,1 \cdot 10^{-9}$

Após a 3 iteração, atingimos a precisão desejada, logo $\bar{x} = 0,347296$.

Método de Newton

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, tem um único zero em $(0, 1)$. Calcule-a com precisão 10^{-5}.

- $\varphi(x) = x - \frac{x^3-3x+1}{3x^2-3}$ i.e, $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3-3x_k+1}{3x_k^2-3}$;

k	x_k	$x_{k+1} = \varphi(x_k)$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	0,5	0,333333333	0,166666667
1	0,333333	0,347222222	0,013888889
2	0,347222	0,347296353	$7,41 \cdot 10^{-5}$
3	0,347296	0,347296355	$2,1 \cdot 10^{-9}$

Após a 3 iteração, atingimos a precisão desejada, logo $\bar{x} = 0,347296$.

Método de Newton

Teorema de Convexidade

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável tal que:

- $f(a)f(b) < 0$;
- $f'(x) \neq 0,\ \forall x \in [a, b]$ e $f''(x)$ não troca sinal em $[a, b]$.

Então existe um zero r de f em $[a, b]$ e se x_0 é tal que $x_1 \in [a, b]$, então a sequência gerada pelo método de Newton converge para r.

Método da Secante

- Uma possível deficiência do método de Newton-Raphson é a necessidade de se calcular a derivada, pois muitas vezes $f'(x)$ é bem complicada que $f(x)$;
- A alternativa é trocar $f'(x_k)$ pela aproximação

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}},$$

onde x_k e x_{k-1} são duas aproximações da raíz. Assim,

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

Método da Secante

Algoritmo

1. Escolha a aproximações iniciais $x_0, \ x_1$ e as precisões $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$
2. Se $|f(x_0)| < \epsilon$, escolha x_0 como raíz aproximada;
3. Caso contrário, se $|x_1 - x_0| < \epsilon$ ou $|f(x_1)| < \epsilon$, escolha x_1 com raiz aproximada;
4. Caso contrário, troque x_0 por x_1 e x_1 por $x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$ e volte ao passo 3.

Método da Secante

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, tem um único zero em $(1, 2)$. Calcule-a com precisão 10^{-5}. usando $x_0 = 1,5$ e $x_1 = 1,7$ como chute inicial

k	x_k	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$	$f(x_k)$
0	1,5		-0,125
1	1,7	0,2	0,813
2	1,526652	0,173347548	-0,021837783
3	1,531187	0,004534445	-0,003642001
4	1,532094	0,000907598	$2,265 \cdot 10^{-5}$
5	1,532089	$5,61 \cdot 10^{-6}$	$-2,32 \cdot 10^{-8}$

De acordo com a tabela acima, $\bar{x} = 1,532089$ é a raíz aproximada de f com a precisão indicada.

Método da Secante

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, tem um único zero em $(1,2)$. Calcule-a com precisão 10^{-5}. usando $x_0 = 1,5$ e $x_1 = 1,7$ como chute inicial

k	x_k	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$	$f(x_k)$
0	1,5		-0,125
1	1,7	0,2	0,813
2	1,526652	0,173347548	-0,021837783
3	1,531187	0,004534445	-0,003642001
4	1,532094	0,000907598	$2,265 \cdot 10^{-5}$
5	1,532089	$5,61 \cdot 10^{-6}$	$-2,32 \cdot 10^{-8}$

De acordo com a tabela acima, $\bar{x} = 1,532089$ é a raíz aproximada de f com a precisão indicada.

Método da Secante

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, tem um único zero em $(1, 2)$. Calcule-a com precisão 10^{-5}. usando $x_0 = 1,5$ e $x_1 = 1,7$ como chute inicial

k	x_k	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$	$f(x_k)$
0	1,5		-0,125
1	1,7	0,2	0,813
2	1,526652	0,173347548	-0,021837783
3	1,531187	0,004534445	-0,003642001
4	1,532094	0,000907598	$2,265 \cdot 10^{-5}$
5	1,532089	$5,61 \cdot 10^{-6}$	$-2,32 \cdot 10^{-8}$

De acordo com a tabela acima, $\bar{x} = 1,532089$ é a raíz aproximada de f com a precisão indicada.

Método da Secante

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, tem um único zero em $(1, 2)$. Calcule-a com precisão 10^{-5}. usando $x_0 = 1,5$ e $x_1 = 1,7$ como chute inicial

k	x_k	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$	$f(x_k)$
0	1,5		-0,125
1	1,7	0,2	0,813
2	1,526652	0,173347548	-0,021837783
3	1,531187	0,004534445	-0,003642001
4	1,532094	0,000907598	$2,265 \cdot 10^{-5}$
5	1,532089	$5,61 \cdot 10^{-6}$	$-2,32 \cdot 10^{-8}$

De acordo com a tabela acima, $\bar{x} = 1,532089$ é a raíz aproximada de f com a precisão indicada.

Método da Secante

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, tem um único zero em $(1, 2)$. Calcule-a com precisão 10^{-5}. usando $x_0 = 1,5$ e $x_1 = 1,7$ como chute inicial

k	x_k	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$	$f(x_k)$
0	1,5		-0,125
1	1,7	0,2	0,813
2	1,526652	0,173347548	-0,021837783
3	1,531187	0,004534445	-0,003642001
4	1,532094	0,000907598	$2,265 \cdot 10^{-5}$
5	1,532089	$5,61 \cdot 10^{-6}$	$-2,32 \cdot 10^{-8}$

De acordo com a tabela acima, $\bar{x} = 1,532089$ é a raíz aproximada de f com a precisão indicada.

Método da Secante

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, tem um único zero em $(1, 2)$. Calcule-a com precisão 10^{-5}. usando $x_0 = 1,5$ e $x_1 = 1,7$ como chute inicial

k	x_k	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$	$f(x_k)$
0	1,5		-0,125
1	1,7	0,2	0,813
2	1,526652	0,173347548	-0,021837783
3	1,531187	0,004534445	-0,003642001
4	1,532094	0,000907598	$2,265 \cdot 10^{-5}$
5	1,532089	$5,61 \cdot 10^{-6}$	$-2,32 \cdot 10^{-8}$

De acordo com a tabela acima, $\bar{x} = 1,532089$ é a raíz aproximada de f com a precisão indicada.

Método da Secante

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, tem um único zero em $(1, 2)$. Calcule-a com precisão 10^{-5}. usando $x_0 = 1,5$ e $x_1 = 1,7$ como chute inicial

k	x_k	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$	$f(x_k)$
0	1,5		-0,125
1	1,7	0,2	0,813
2	1,526652	0,173347548	-0,021837783
3	1,531187	0,004534445	-0,003642001
4	1,532094	0,000907598	$2,265 \cdot 10^{-5}$
5	1,532089	$5,61 \cdot 10^{-6}$	$-2,32 \cdot 10^{-8}$

De acordo com a tabela acima, $\bar{x} = 1,532089$ é a raíz aproximada de f com a precisão indicada.

Método da Secante

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, tem um único zero em $(1, 2)$. Calcule-a com precisão 10^{-5}. usando $x_0 = 1,5$ e $x_1 = 1,7$ como chute inicial

k	x_k	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$	$f(x_k)$
0	1,5		-0,125
1	1,7	0,2	0,813
2	1,526652	0,173347548	-0,021837783
3	1,531187	0,004534445	-0,003642001
4	1,532094	0,000907598	$2,265 \cdot 10^{-5}$
5	1,532089	$5,61 \cdot 10^{-6}$	$-2,32 \cdot 10^{-8}$

De acordo com a tabela acima, $\bar{x} = 1,532089$ é a raíz aproximada de f com a precisão indicada.


GARANTE O TEU FUTURO
COM UMA FORMAÇÃO SÓLIDA
ISUTC
Prolong. da Av. Kim Il Sung (IFT/TDM) Edifício D1
Maputo, Moçambique
www.facebook.com/isutc
www.transcom.co.mz/isutc